
Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática

Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Por
Cleber de Oliveira dos Santos

Florianópolis - SC
2011

Cleber de Oliveira dos Santos

Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Monografia apresentada ao departamento de
Matemática da Universidade Federal de Santa
Catarina, como requisito para obtenção do tí-
tulo de Especialista em Matemática.

Orientador: Cleverson Roberto da Luz

Florianópolis - SC
2011



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS**

Departamento de Matemática

Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Sistemas de Equações Diferenciais Lineares"

**Monografia submetida à Comissão de
avaliação do Curso de Especialização
em Matemática-Formação do professor
em cumprimento parcial para a
obtenção do título de Especialista em
Matemática.**

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 02/02/2011

Dr. Cleverson Roberto da Luz (Orientador)

Cleverson R. da Luz

Dr. Ruy Coimbra Charão (Examinador)

Ruy Coimbra Charão

Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa (Examinador)

Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Neri Terezinha Both Carvalho
Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, fevereiro de 2011.

Agradecimentos

Ao professor Dr. Cleverson, orientador desse trabalho, por ter acreditado, apoiado e orientado na sua produção, bem como, pelo tempo dedicado para correções e sugestões de grande importância para sua conclusão final;

Ao colega e amigo Ismael, primeiramente deixo aqui um breve relato da consideração e admiração que tenho do seu conhecimento matemático, sempre que precisei da sua ajuda pude contar. Meus agradecimentos pela sua contribuição na resolução de vários problemas e exercícios que enfrentamos nas disciplinas e no tempo que estamos trabalhando juntos como tutores do curso de Matemática-Licenciatura UFSC pólo de Tubarão; ao colega Estevan, por ter se disposto a me ajudar na realização do trabalho com suas explicações sobre o referido tema, valiosa contribuição;

A professora Neri, por sua dedicação e esforço para realizar o curso; Aos professores das disciplinas do curso em especial aos professores Oscar e Silvia por minha admiração pelo seu conhecimento matemático e por sua didática nas aulas, esses deram grande contribuição para meu conhecimento de Álgebra e Cálculo;

Aos amigos, colegas e familiares que me apoiaram durante o período da realização do curso, dando conselhos, força nas horas que mais precisei e sendo compreensivos durante o tempo em que não pude lhes dar a atenção devida pelo fato da minha dedicação para realização desse curso especial para minha formação, pelo quadro de professores altamente qualificados, pela transmissão de conhecimento que passaram durante as disciplinas;

E finalmente, meu eterno agradecimento a todas as pessoas que não acreditam no meu potencial.

"Meu filho, aceita a instrução desde teus jovens anos; ganharás uma sabedoria que durará até à velhice. Vai ao encontro dela, como aquele que lavra e semeia; espera pacientemente seus excelentes frutos; terás alguma pena em cultivá-la, mas, em breve, comerás os teus frutos. (...) Pois a sabedoria que instrui justifica o seu nome, não se manifesta a muitos; mas, naqueles que a conhecem, persevera, até (tê-los levado) à presença de Deus".

Eclesiástico 6,18-20,23

Sumário

1	Álgebra Matricial	9
1.1	Tipos de Matrizes	10
1.2	Operações com Matrizes	10
1.3	Definições Importantes	13
1.4	A Exponencial de uma Matriz	14
2	Sistemas de Equações Diferenciais	19
2.1	Sistemas de Equações Diferenciais Homogêneos	22
2.2	Sistemas de Equações Diferenciais Não-Homogêneos	26
2.3	Redução de Ordem	27
2.4	Sistemas com Coeficientes Constantes	29
2.4.1	Sistemas Homogêneos	29
2.4.2	Sistemas Não-Homogêneos: Variação de Parâmetros	36
3	Aplicações	41
3.1	Problemas do Sistema Massa-Mola	41
3.2	Problemas de Diluição	48
3.3	Problemas de Circuitos Elétricos	54
3.4	Problema de Lançamento de Corpos	60

Introdução

Atualmente, modelos matemáticos são usados em várias áreas do conhecimento, tais como: Física, Química, Biologia, Engenharia, entre outras. Diversos problemas envolvendo situações práticas dessas áreas são resolvidos usando modelos matemáticos expressos por equações diferenciais.

As equações diferenciais são equações que relacionam funções e suas derivadas. Assim, resolver uma equação diferencial é encontrar uma função que satisfaça a equação e verifique determinadas condições iniciais.

No presente trabalho tratamos de problemas que podem ser modelados a partir de um conjunto de equações diferenciais. Essas equações são determinadas em função de alguns valores conhecidos ou dado pelo modelo real. Assim, de forma conceitual, um modelo matemático, pode ser apresentado como uma representação de um sistema real, ou seja, um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem suas modificações. Dessa forma, percebesse a importância da utilização de modelos matemáticos para resolver situações problemas. Nesse momento apresenta-se a problemática do presente estudo: A modelagem matemática através de um sistema de equações diferenciais lineares, é essencial para determinar as possíveis soluções dos problemas existentes em diversas áreas? Para buscar respostas a este questionamento, propõe-se como objetivo geral deste estudo: Analisar modelos matemáticos; No caso particular da pesquisa, investiga-se os métodos de abordagem para determinar as soluções possíveis de um sistema de equações diferenciais. Tendo como objetivos específicos: descrever os fenômenos físicos; analisar as possíveis soluções de sistemas de equações diferenciais; mostrar a aplicabilidade dos problemas; mostrar que, quando a matriz de um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem é diagonalizável, então, podemos expressar a solução geral desse sistema em termos dos autovalores e autovetores dessa matriz.

Além da introdução, que destaca a construção metodológica, este estudo está organizado em três capítulos complementares entre si. No primeiro capítulo, apresentamos uma breve revisão sobre matrizes e algumas definições importantes para o nosso trabalho. Logo após apresentamos a exponencial de uma matriz e provamos algumas propriedades da matriz exponencial. No se-

gundo capítulo, apresentamos a teoria básica dos sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem: homogêneos e não-homogêneos. Mostramos também como fazer para reduzir um sistema de equações diferenciais ordinárias de qualquer ordem a um sistema equivalente de primeira ordem. Na sequência do capítulo 2, consideramos os sistemas lineares com coeficientes constantes e mostramos como encontrar a solução através dos autovalores e autovetores relacionados com a matriz dos coeficientes. Finalmente, no terceiro capítulo apresentamos a resolução de alguns problemas aplicados fazendo o uso dos métodos estudados no capítulo anterior. Caro leitor, as principais referências para elaborar a parte teórica e prática da monografia foram as seguintes: [7], [9], [10], [11], [12], [13], [19], [20], [21], [22], [27] e [31].

Capítulo 1

Álgebra Matricial

Neste capítulo, apresentaremos um breve resumo sobre matrizes, autovalores e autovetores, matriz diagonalizável. Além disso, definiremos a exponencial de uma matriz e provaremos algumas de suas propriedades.

Definição 1.1 *Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1. Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \times n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas. Os números são chamados de elementos. As linhas são enumeradas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para direita.*

Veja o exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & \sqrt{3} & -6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

A matriz A é uma matriz de ordem 2×3 .

Costuma-se representar as matrizes por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas por dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Assim, uma matriz A de ordem $m \times n$ é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Abreviadamente podemos escrever, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $i, j \in \mathbb{N}$.

Definição 1.2 *Duas matrizes, A e B , da mesma ordem $m \times n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais, ou seja, $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.*

1.1 Tipos de Matrizes

Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

Considere uma matriz quadrada $n \times n$. Os elementos da diagonal principal são os elementos da posição $i = j$.

Matriz Linha é aquela que possui uma única linha ($m = 1$). Para colocar vetores no plano ou no espaço costumamos usar a matriz linha.

Matriz Coluna é aquela que possui apenas uma coluna ($n = 1$).

Um vetor no plano ou no espaço pode ser considerado como uma matriz coluna. Usaremos essa forma ao representar a solução de um sistema de equações. Assim, se tivermos duas ou três incógnitas elas podem ser representadas numa forma vetorial no plano ou no espaço.

Matriz Nula é aquela em que todos os seus elementos são nulos.

Matriz Diagonal é uma matriz quadrada cujos elementos $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Portanto, possui todos os valores iguais à zero, exceto os elementos da diagonal principal.

Matriz Identidade é uma matriz quadrada cujos elementos $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$. Portanto, possui todos os valores nulos, exceto os valores da diagonal principal que valem sempre 1.

Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada de ordem n cujos elementos $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Matriz Triangular Inferior é uma matriz quadrada de ordem n cujos elementos $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

Matriz Simétrica é uma matriz quadrada de ordem n , em que $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.

Matriz Anti-Simétrica é uma matriz quadrada de ordem n , em que $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.

1.2 Operações com Matrizes

Nesta seção vamos definir as seguintes operações: adição, produto por um escalar, transposição e produto de matrizes.

Adição de matrizes

Definição 1.3 Sejam, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, a matriz A somada com a matriz B , resulta numa matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, cujos elementos são: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$. Denotamos por: $C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Propriedade 1.1 *Propriedades da adição com matrizes:*

- (a) *Comutatividade:* $A + B = B + A$.
- (b) *Associatividade:* $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- (c) *Elemento Neutro da Adição:* $A + 0 = 0 + A = 0$, onde 0 denota a matriz nula com a mesma ordem da matriz A .

Produto de uma matriz por um escalar

A multiplicação por um escalar é uma das operações mais simples que podem ser feitas com matrizes.

Definição 1.4 *Seja k um número qualquer. Para multiplicar k por uma matriz A de ordem $m \times n$, basta multiplicar cada entrada a_{ij} de A por k . Assim, a matriz resultante B será também $m \times n$ e seus elementos serão $b_{ij} = ka_{ij}$.*

Propriedade 1.2 *Propriedades do produto por um escalar:*

- (a) *Associativa em relação ao escalar:* $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$.
- (b) *Distributiva à direita em relação às matrizes:* $k(A + B) = kA + kB$.
- (c) *Distributiva à esquerda em relação aos escalares:* $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.
- (d) *Elemento Neutro:* $1.A = A$.
- (e) *A multiplicação do escalar zero por uma matriz A qualquer resulta na matriz nula, ou seja, $0.A = 0$.*

Matriz transposta

Definição 1.5 *Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A , isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^t é denominada a transposta de A .*

Propriedade 1.3 *Propriedades da matriz transposta:*

- (a) $(A^t)^t = A$.
- (b) $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- (c) A é simétrica se, e somente se, $A = A^t$.
- (d) $(kA)^t = kA^t$, k é um escalar qualquer.

Produto de Matrizes

A multiplicação de duas matrizes está definida apenas se o número de colunas da matriz da esquerda for igual ao número de linhas da matriz da direita.

Definição 1.6 *Sejam, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$, então, seu produto $A.B$ é a matriz $m \times p$ (m linhas e p colunas) dada por: $C = [c_{uv}]_{m \times p}$. Os elementos da matriz produto c_{uv} são dados por: $c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv}$.*

Propriedade 1.4 *Propriedades do Produto de Matrizes:*

- (a) *Em geral $AB \neq BA$.*
- (b) *$AI = IA = A$, onde I é a matriz identidade.*
- (c) *Associativa: $(AB)C = A(BC)$.*
- (d) *Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$.*
- (e) *$(A + B)C = AC + BC$.*
- (f) *$k(AB) = (kA)B = A(kB)$.*
- (g) *$(AB)^t = B^t A^t$.*

Matriz inversa

Definição 1.7 *Dada uma matriz A , quadrada, de ordem n , se existir uma matriz A^{-1} , de mesma ordem, tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ (onde I_n é a matriz identidade), então dizemos que A é inversível e que A^{-1} é matriz inversa de A .*

Se A tiver inversa, A é uma matriz **não-singular**, caso contrário, A é **singular**.

Propriedade 1.5 *Propriedades das Matrizes Inversas: Se A e B são inversíveis, então:*

- (a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (b) $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (c) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

1.3 Definições Importantes

Determinante

Definição 1.8 Dada a matriz de ordem n , $A = [a_{ij}]_n$, o determinante de A , é definido por: $\det(A) = \sum_{\rho} (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$. Onde: $J = J(j_1, j_2, \dots, j_n)$

j indica o número de inversões da permutação (j_1, j_2, \dots, j_n) , ρ indica o somatório é estendido a todas as $n!$ permutações dos números $1, 2, \dots, n$.

Dependência e Independência Linear

Definição 1.9 Seja X_1, X_2, \dots, X_n um conjunto de vetores em um espaço vetorial. Dizemos que o conjunto é Linearmente Dependente (LD), se existirem constantes c_1, \dots, c_n não todas nulas, tais que: $c_1 X_1 + \dots + c_n X_n = 0$. Um conjunto que não é Linearmente Dependente é dito Linearmente Independente (LI).

Autovetor e Autovalor

Definição 1.10 Seja A uma matriz de ordem n . Se existirem $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Av = \lambda v$, λ é um autovalor de A e v um autovetor de A associado a λ .

Na Definição 1.10 podemos escrever $(A - \lambda I)v = 0$. Se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, sabemos que o problema anterior tem uma única solução dada por: $v = 0$. Portanto, para determinar os autovalores e autovetores devemos encontrar λ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Como a equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é uma equação polinomial de grau n , existem n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, alguns dos quais podem ser repetidos. Se um certo autovalor aparecer m vezes, se diz que este autovalor tem **multiplicidade** m . Cada autovalor tem pelo menos um autovetor que lhe é associado, e um autovalor de multiplicidade m pode ter q autovetores linearmente independentes associados, com $1 \leq q \leq m$.

Se todos os autovalores de uma matriz A tiverem multiplicidade 1 é possível mostrar que os n autovetores de A , um para cada autovalor, são linearmente independentes. Por outro lado, se A tiver um, ou mais de um, autovalor repetido, então podem existir menos do que n autovetores linearmente independentes associados a A .

Matriz Diagonalizável

Definição 1.11 Dizemos que uma matriz A , $n \times n$, é diagonalizável, se existem matrizes P e D tais que $A = PDP^{-1}$, ou equivalentemente, $D = P^{-1}AP$, em que P é uma matriz inversível e D é uma matriz diagonal.

Funções Matriciais

Definição 1.12 *Seja A uma matriz em que cada uma das suas entradas $[a_{ij}]$ é uma função de variável real t . Então, A é uma função matricial de variável real t . Se as entradas da matriz A são os elementos $[a_{ij}]$, então as entradas de dA/dt são $[da_{ij}/dt]$; as entradas de $\int A dt$ são $[\int a_{ij} dt]$. Dizemos que a matriz A é contínua (diferenciável, integrável, etc. . .) se suas entradas $[a_{ij}]$ forem todas elas funções contínuas (diferenciáveis, integráveis, etc, ...).*

1.4 A Exponencial de uma Matriz

Nessa seção definiremos a exponencial de uma matriz provando sua convergência e algumas propriedades importantes.

Seja M_n o espaço vetorial formado pelas matrizes de ordem $n \times n$ com entradas reais. Consideramos M_n com a seguinte norma:

$$\|A\|_{M_n} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}, \quad A \in M_n.$$

Propriedade 1.6 *Propriedades da norma:*

- (i) $\|Bx\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|B\|_{M_n} \|x\|_{\mathbb{R}^n}$ para toda matriz $B \in M_n$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) $\|BC\|_{M_n} \leq \|B\|_{M_n} \|C\|_{M_n}$ para quaisquer $B, C \in M_n$.
- (iii) $\|B^k\|_{M_n} \leq \|B\|_{M_n}^k$ para toda matriz $B \in M_n$ e todo inteiro não negativo k .

Demonstração:

- (i) Se $x = 0$, então $\|Bx\|_{\mathbb{R}^n} = 0 = \|B\|_{M_n} \|x\|_{\mathbb{R}^n}$.

Se $x \neq 0$ então $\|x\|_{\mathbb{R}^n} \neq 0$. Seja $y = \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}$, então $\|y\|_{\mathbb{R}^n} = \frac{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|B\|_{M_n} &\geq \|By\|_{\mathbb{R}^n} = \frac{\|Bx\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} \\ \|B\|_{M_n} \|x\|_{\mathbb{R}^n} &\geq \|Bx\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

- (ii) Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1$. Por (i), temos:

$$\|B(Cx)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|B\|_{M_n} \|Cx\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|B\|_{M_n} \|C\|_{M_n} \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|B\|_{M_n} \|C\|_{M_n}.$$

Como, $\|B\|_{M_n} \|C\|_{M_n}$ é uma cota superior para os valores de $\|(BC)x\|_{\mathbb{R}^n}$ quando $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1$, concluímos que (ii) é verdadeiro.

- (iii) É trivial se $k = 0$ ou $k = 1$. Agora, se $k > 1$ é uma consequência imediata de (ii).

Proposição 1.1 M_n é um espaço normado completo, isto é, em M_n toda sequência de Cauchy é convergente.

Se $x \in \mathbb{R}$ sabemos através da série de Taylor que

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Agora, vamos apresentar a definição da exponencial de uma matriz.

Definição 1.13 Para a matriz A , de ordem $n \times n$, definimos:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^i}{i!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}. \quad (1.1)$$

Vamos mostrar que e^{At} está bem definida para qualquer $t \in \mathbb{R}$, ou seja, vamos mostrar que a série dada em (1.1) é convergente no espaço M_n .

Denotamos por

$$S_m = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^m}{m!}$$

e consideramos a diferença, para $m > \mu$:

$$\|S_m - S_\mu\|_{M_n} = \left\| \sum_{i=\mu+1}^m \frac{(At)^i}{i!} \right\|_{M_n} \leq \sum_{i=\mu+1}^m \frac{|t|^i}{i!} \|A^i\|_{M_n} \leq \sum_{i=\mu+1}^m \frac{|t|^i}{i!} \|A\|_{M_n}^i, \quad (1.2)$$

onde foi usado a Propriedade 1.6.

Sabemos que

$$e^{\|At\|_{M_n}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} \|A\|_{M_n}^i$$

é convergente, então as somas parciais da série acima formam uma sequência convergente, portanto de Cauchy. Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\sum_{i=\mu+1}^m \frac{|t|^i}{i!} \|A\|_{M_n}^i < \epsilon, \quad \forall m, \mu \geq N.$$

Assim, por (1.2) temos:

$$\|S_m - S_\mu\|_{M_n} < \epsilon, \quad \forall m, \mu \geq N.$$

Logo, a série S_m é de Cauchy e portanto convergente, pois M_n é um espaço normado completo, o que prova que a exponencial da matriz A está bem definida:

$$e^A = I + A + \frac{(A)^2}{2!} + \frac{(A)^3}{3!} + \dots$$

Proposição 1.2 *Propriedades da matriz exponencial:*

- (a) $e^A = I$, se A é a matriz nula.
 (b) Se P é inversível, então, $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.

Demonstração:

- (a) Seja $A=0$, a matriz nula, então:

$$e^0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0^i}{i!} = I + 0 + \frac{0^2}{2!} + \dots + \frac{0^i}{i!} + \dots = I.$$

- (b) Por definição:

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} (PAP^{-1})^i \frac{1}{i!} = I + PAP^{-1} + \frac{(PAP^{-1})^2}{2!} + \dots + \frac{(PAP^{-1})^i}{i!} + \dots$$

Observe que $(PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA^2P^{-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} e^{PAP^{-1}} &= \sum_{i=0}^{\infty} (PAP^{-1})^i \frac{1}{i!} = PP^{-1} + PAP^{-1} + P \frac{A^2}{2!} P^{-1} + \dots + P \frac{A^i}{i!} P^{-1} + \dots \\ &= P \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^i}{i!} + \dots \right) P^{-1} = Pe^AP^{-1}. \end{aligned}$$

Para provar a próxima proposição precisamos do seguinte resultado de série de funções.

Teorema 1.1 *Seja D um conjunto aberto de \mathbb{R} . Considere as funções vetoriais $f_i : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ tal que a série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ converge pontualmente em D para a função f . Suponhamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função f_i é diferenciável em D e a função f'_i é contínua em D . Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} f'_i(x)$ é uniformemente convergente em D então a função $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ é diferenciável em D e temos, para todo $x \in D$,*

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f'_i(x).$$

Proposição 1.3 *Propriedades da matriz exponencial e^{tA} :*

- (a) Seja $Y(t) = e^{At}$, então $Y'(t) = AY(t)$ para todo número real t .
 (b) A matriz e^{At} é inversível para todo t , e $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$. Em particular, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Demonstração:

(a) Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere a função $f_i : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ dada por

$$f_i(t) = \frac{(tA)^i}{i!} = \frac{t^i A^i}{i!},$$

onde M_n denota o espaço das matrizes reais quadradas de ordem n .

Por definição, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t).$$

Além disso, f_i é diferenciável em \mathbb{R} e a função

$$f'_i(t) = \left(it^{i-1} \frac{A^i}{i!} \right)$$

é uma função contínua em \mathbb{R} , para cada $i \in \mathbb{N}$.

Sabemos que e^{tA} é uma série uniformemente convergente então a série

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} f'_i(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(it^{i-1} \frac{A^i}{i!} \right) = \\ &= A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \dots \\ &= A \left[I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^{i-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \dots \right] \\ &= Ae^{At} \end{aligned}$$

é uniformemente convergente.

Assim, as funções f_i satisfazem todas as hipóteses do Teorema 1.1, portanto:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty} f'_i(t) = Ae^{tA},$$

ou seja,

$$Y'(t) = \frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = AY(t).$$

(b) Usando a Regra de Leibniz para um produto de matrizes, temos:

$$\frac{d}{dt}(e^{At}e^{-At}) = Ae^{At}e^{-At} + e^{At}(-A)e^{-At}.$$

A matriz $(-A)$ comuta com toda potência natural de A , então $(-A)$ comuta com e^{At} , assim:

$$\frac{d}{dt}(e^{At}e^{-At}) = Ae^{At}e^{-At} + (-A)e^{At}e^{-At} = 0.$$

Assim, $(e^{At}e^{-At})$ é constante em relação a t . Logo,

$$e^{At}e^{-At} = e^{A0}e^{-A0} = I.$$

Capítulo 2

Sistemas de Equações Diferenciais

Neste capítulo vamos apresentar um estudo sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares. Esses sistemas aparecem frequentemente em matemática aplicada, economia e engenharia ao modelar certos fenômenos. Muitos matemáticos famosos estudaram equações diferenciais dando sua contribuição a ciência, onde podemos incluir Newton, Leibniz, Família de Bernoulli, Riccati, Clairaut, d'Alembert e Euler entre outros. Podemos reduzir um sistema de equações diferenciais ordinárias de qualquer ordem a um sistema equivalente de primeira ordem. Em geral, um sistema de equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

onde t é a variável independente e pertence a algum intervalo I . As funções $x_i = x_i(t)$ são funções reais e $F_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $1 \leq i \leq n$.

Definição 2.1 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Um sistema da forma*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

para $t \in I$, é chamado de sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Se todas as funções f_1, \dots, f_n forem identicamente nulas no intervalo I , dizemos que o sistema (2.1) é homogêneo; caso contrário, ele é não-homogêneo.

Definição 2.2 *Funções*

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \dots, \quad x_n = \phi_n(t),$$

formam uma solução do sistema (2.1) no intervalo I se:

- i) São diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I .
- ii) Satisfazem o sistema (2.1) para todo $t \in I$.

Definição 2.3 Para o sistema (2.1), pode-se dar n condições iniciais da forma:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \quad (2.2)$$

com t_0 pertencente ao intervalo I e $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ números reais. As equações diferenciais do sistema (2.1) e as condições iniciais (2.2) formam um problema de valor inicial (PVI).

Exemplo 2.1 Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 - x_3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Verifique que:

(a) As funções

$$\phi_1(t) = 0, \quad \phi_2(t) = e^t \quad \text{e} \quad \phi_3(t) = 0, \quad (2.4)$$

formam uma solução para o sistema (2.3) em todo intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

(b) As funções

$$\phi_1(t) = \cos t, \quad \phi_2(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \quad \text{e} \quad \phi_3(t) = -\cos t - \sin t, \quad (2.5)$$

formam uma solução para o sistema (2.3) em todo intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

(a) **Resolução:**

Sejam as seguintes funções: $\phi_1(t) = x_1 = 0$, $\phi_2(t) = x_2 = e^t$ e $\phi_3(t) = x_3 = 0$. Sabemos que as funções acima são diferenciáveis em $I = (-\infty, \infty)$ e que:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = e^t \quad \text{e} \quad \frac{dx_3}{dt} = 0, \quad \forall t \in I.$$

Agora, substituindo no sistema (2.3), $x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$ e $\frac{dx_3}{dt}$ pelos seus respectivos valores, temos:

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 \\ e^t = 0 + e^t \\ 0 = -2 \cdot 0 - 0. \end{cases}$$

Assim, a condição (ii) da Definição 2.2 foi verificada. Portanto, de acordo com a Definição 2.2 as funções (2.4) formam uma solução do sistema (2.3) no intervalo I .

(b) Resolução:

Sejam as seguintes funções: $\phi_1(t) = x_1 = \cos t$, $\phi_2(t) = x_2 = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$ e $\phi_3(t) = x_3 = -\cos t - \sin t$. Sabemos que as funções acima são diferenciáveis em $I = (-\infty, \infty)$ e que:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t \quad \text{e} \quad \frac{dx_3}{dt} = \sin t - \cos t, \quad \forall t \in I.$$

Substituindo no sistema (2.3), $x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$ e $\frac{dx_3}{dt}$ pelos seus respectivos valores, temos:

$$\begin{cases} -\sin t = \cos t + (-\cos t - \sin t) \\ \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t = \cos t + \left(-\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \right) \\ \sin t - \cos t = -2 \cdot \cos t - (-\cos t - \sin t). \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} -\sin t = -\sin t \\ \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t \\ \sin t - \cos t = \sin t - \cos t. \end{cases}$$

Assim, a condição (ii) da Definição 2.2 foi verificada. Portanto, de acordo com a Definição 2.2 as funções (2.5) formam uma solução do sistema (2.3) no intervalo I .

Anunciaremos a seguir, um Teorema sobre a existência e a unicidade para um sistema de equações de primeira ordem.

Teorema 2.1 *Se as funções a_{ij} com $1 \leq i, j \leq n$ e f_i com $1 \leq i \leq n$ são contínuas em um intervalo aberto I , então existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema (2.1) que também satisfaz as condições iniciais (2.2), onde t_0 é qualquer ponto em I e $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ são números reais arbitrários. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I .*

A demonstração desse teorema pode ser feita pelo método de aproximações sucessivas (ver [9]).

Forma Matricial de um Sistema Linear: O sistema de equações diferenciais de primeira ordem (2.1) pode ser escrito da forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in I$$

ou ainda,

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \quad \forall t \in I, \quad (2.6)$$

$$\text{com } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \text{ e } F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Além disso, podemos escrever o sistema de equações diferenciais (2.1) com condições iniciais (2.2) da forma:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + F(t), & \forall t \in I \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{onde } X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}.$$

2.1 Sistemas de Equações Diferenciais Homogêneos

Usando a notação dada anteriormente, se $F = 0$, podemos considerar o seguinte sistema homogêneo:

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad \forall t \in I. \quad (2.8)$$

Abaixo um exemplo de sistema homogêneo escrito na forma matricial:

Exemplo 2.2 *O sistema homogêneo*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 - x_3, \end{cases} \quad (2.9)$$

pode ser escrito da forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Seja, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, então o sistema de equações

diferenciais (2.9) pode ser escrito na forma: $\frac{d}{dt}X = AX$.

Neste momento, apresentamos a definição de dependência e independência linear, pois estamos interessados em soluções linearmente independentes do sistema homogêneo (2.8).

Definição 2.4 (*Dependência e Independência Linear*) Seja X_1, X_2, \dots, X_n um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2.8) no intervalo I . Dizemos que o conjunto é Linearmente Dependente (LD) no intervalo I , se existirem constantes c_1, \dots, c_n não todas nulas, tais que: $c_1X_1 + \dots + c_nX_n = 0$, $\forall t \in I$. Um conjunto que não é Linearmente Dependente no intervalo I é dito Linearmente Independente (LI).

Teorema 2.2 (*Princípio da Superposição*) Sejam X_1, \dots, X_n soluções do problema homogêneo (2.8) no intervalo I , então a combinação linear $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ também é solução do sistema (2.8) quaisquer que sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Abaixo, apresentamos um exemplo usando o princípio da superposição.

Exemplo 2.3 Pelo Exemplo 2.1, sabemos que os vetores

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix} \text{ são soluções do sistema (2.3),}$$

então pelo princípio da superposição, a combinação linear:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \cos t \\ -\frac{c_2}{2} \cos t + \frac{c_2}{2} \sin t + c_1 e^t \\ -c_2 \cos t - c_2 \sin t \end{bmatrix}$$

é também solução do sistema (2.3) quaisquer que sejam $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

De acordo com o Teorema 2.2 o conjunto das soluções do sistema homogêneo (2.8) é um espaço vetorial. Na sequência veremos que esse espaço vetorial tem dimensão n .

Seja $\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$ com $1 \leq i \leq n$, n soluções do sistema homogêneo (2.8).

Consideramos a seguinte matriz:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Podemos afirmar que para cada t fixo, as colunas da matriz (2.10) são linearmente independentes se, e somente se, $\det X(t) \neq 0$.

Definição 2.5 *O determinante da matriz definida em (2.10), $\det X$, é chamado de Wronskiano das n soluções do sistema homogêneo (2.8) e é denotado por $W[X_1, \dots, X_n] = \det X$.*

Teorema 2.3 *Seja $A = A(t)$ uma matriz contínua em I e X_1, \dots, X_n soluções do problema (2.8) no intervalo I , então, $W[X_1, \dots, X_n]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

Demonstração:

Definimos:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in I, \quad \text{com } X_i(t) = \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{bmatrix}.$$

Suponha que exista $t_0 \in I$ tal que $W[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)] = 0$. Então existe

um vetor não nulo $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, tal que

$$\phi(t_0) C = c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \dots + c_n X_n(t_0) = 0.$$

Considere a função:

$$\psi(t) = \phi(t) C, \quad \forall t \in I.$$

É imediato que ψ é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), & \forall t \in I \\ X(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Pelo Teorema 2.1, o sistema acima possui uma única solução. Como a função nula é solução do sistema (2.11), concluímos que

$$\psi(t) = \phi(t)C = 0, \quad \forall t \in I.$$

Assim,

$$\phi(t)C = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \dots + c_nX_n(t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

o que implica que $\det \phi(t) = W[X_1(t), \dots, X_n(t)] = 0, \forall t \in I$, como queríamos demonstrar.

Observação 2.1 De acordo com o Teorema 2.3 podemos afirmar que X_1, \dots, X_n são soluções linearmente independentes do sistema homogêneo (2.8) no intervalo I , se, e somente se, $\det X \neq 0$ em algum ponto do intervalo I , onde X é a matriz definida em (2.10).

Teorema 2.4 Sejam X_1, \dots, X_n soluções linearmente independentes do sistema homogêneo (2.8) em um intervalo I em que $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, são contínuas. Então cada solução $X = \phi(t)$ do sistema homogêneo (2.8) pode ser expressa, de modo único, como uma combinação linear de X_1, \dots, X_n , dada por:

$$\phi(t) = \alpha_1X_1(t) + \dots + \alpha_nX_n(t), \quad \forall t \in I,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Definição 2.6 Se X_1, \dots, X_n são soluções linearmente independentes do sistema homogêneo (2.8), então dizemos que X_1, \dots, X_n formam um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (2.8) no intervalo I .

Teorema 2.5 Se $X' = AX$ é um sistema homogêneo no intervalo I , então é possível encontrar um conjunto fundamental de soluções para este sistema no mesmo intervalo.

A prova desse teorema segue do Teorema 2.1 de existência e unicidade de soluções.

Teorema 2.6 (Solução Geral dos Sistemas Homogêneos) Seja X_1, X_2, \dots, X_n um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (2.8) no intervalo I . Então, a solução geral do sistema no intervalo I é dada por:

$$X = c_1X_1 + \dots + c_nX_n,$$

onde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ são constantes arbitrárias.

Exemplo 2.4 Sabemos que os vetores: $X_1 = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}$, são soluções do sistema (2.3) no Exemplo 2.1.

É fácil verificar que o vetor $X_3 = \begin{bmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \\ -\sin t + \cos t \end{bmatrix}$ também é solução do sistema (2.3). Como,

$$W(X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t & e^t & -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \\ -\cos t - \sin t & 0 & -\sin t + \cos t \end{vmatrix} = e^t \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, X_1 , X_2 e X_3 formam um conjunto fundamental de soluções no intervalo $I = (-\infty, \infty)$. Logo, a solução geral do sistema (2.3) no intervalo I é a combinação linear $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$, ou seja,

$$X = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \\ -\sin t + \cos t \end{bmatrix}.$$

2.2 Sistemas de Equações Diferenciais Não-Homogêneos

Para o nosso estudo, também é necessário conhecer a solução de um sistema não-homogêneo. Assim, apresentaremos a solução para o caso de sistemas de equações diferenciais lineares não-homogêneos. Qualquer vetor, livre de parâmetros arbitrários, cujos elementos são funções que satisfazem o sistema (2.7) é uma solução particular X_p em um intervalo I do sistema (2.7).

Teorema 2.7 (Solução Geral dos Sistemas Não-Homogêneos) Seja X_p uma solução particular do sistema não-homogêneo (2.7) no intervalo I e seja $X_h = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$ a solução geral no mesmo intervalo do sistema homogêneo (2.8). Então a solução geral do sistema não-homogêneo no intervalo é dada por: $X = X_h + X_p$. A solução X_h do sistema homogêneo (2.8) é chamada solução complementar do sistema não-homogêneo (2.7).

De acordo com o Teorema 2.7 a solução geral do sistema não-homogêneo (2.7), $X'(t) = A(t)X(t) + F(t)$, é dada por: $X(t) = X_p(t) + \alpha_1 X_1(t) + \dots + \alpha_n X_n(t)$, onde X_1, \dots, X_n são as soluções do sistema homogêneo (2.8) e $X_p(t)$ é uma solução particular do sistema de equações diferenciais não-homogêneo.

Exemplo 2.5 Considere o seguinte sistema não-homogêneo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2 + 12t - 11 \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 3x_2 - 3 \end{cases} \quad (2.12)$$

no intervalo $I = (-\infty, \infty)$. Escrevendo na forma matricial temos:

$$X' = AX + F,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $F(t) = \begin{bmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{bmatrix}$.

É fácil verificar que $X_p = \begin{bmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{bmatrix}$ é uma solução particular do sistema não-homogêneo (2.12) no intervalo I . A solução complementar de (2.12) no mesmo intervalo é a solução geral de

$$X' = AX$$

dada por:

$$X_h = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t}.$$

Logo, pelo Teorema 2.7,

$$X = X_h + X_p = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t} + \begin{bmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{bmatrix}$$

é a solução geral de (2.12) no intervalo I .

2.3 Redução de Ordem

Dada uma equação diferencial ordinária linear de ordem n , podemos representar como um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Vamos considerar uma equação diferencial ordinária linear de ordem n na sua forma padrão:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \quad (2.13)$$

com as condições iniciais: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$. Seja $x_1 = y$, $x_2 = y'$, \dots , $x_n = y^{(n-1)}$. Então a equação diferencial (2.13) pode ser representada pelo seguinte sistema de n equações diferenciais ordinárias de

primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = -a_n(t)x_1 - \dots - a_1(t)x_n + f(t). \end{cases}$$

Assim, temos as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = y_0 \\ x_2(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1}(t_0) = y_{n-2} \\ x_n(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Portanto, resolver uma equação diferencial ordinária de ordem n equivale a resolver um sistema de n equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

Exemplo 2.6 Consideremos a equação diferencial ordinária de terceira ordem, dada por:

$$y''' + 2y'' + 4y' - 7y = \text{sen}(2t). \quad (2.14)$$

Fazendo, a seguinte mudança de variável $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, podemos reescrever o sistema (2.14), como um sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -2x_3 - 4x_2 + 7x_1 + \text{sen}(2t). \end{cases}$$

A seguir, vamos apresentar um exemplo de um sistema linear envolvendo derivadas de ordem superior reduzido a um sistema linear de primeira ordem.

Exemplo 2.7 Consideremos o sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem:

$$\begin{cases} 3y'' = 6y + 4z \\ z'' = 4y - 2z + 60 \text{sen}(2t). \end{cases} \quad (2.15)$$

Fazendo, a seguinte mudança de variável, $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = z$ e $x_4 = z'$, então $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = x_4$ e $x_4' = z''$, assim, podemos reescrever o

sistema (2.15), como um sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ 3x_2' = 6x_1 + 4x_3 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = 4x_1 - 2x_3 + 60 \operatorname{sen}(2t). \end{cases}$$

2.4 Sistemas com Coeficientes Constantes

2.4.1 Sistemas Homogêneos

Nesse momento, vamos considerar os sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (2.16)$$

para $t \in I$, onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

O sistema acima pode ser escrito da forma:

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX(t), \quad (2.17)$$

onde A é a matriz $n \times n$ dos coeficientes do sistema, X um vetor de dimensão n cuja as entradas são funções que variam com t .

Teorema 2.8 *Seja A uma matriz $n \times n$. Então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

tem uma única solução dada por $X(t) = e^{tA} X_0$.

Demonstração:

Pela Proposição 1.3 temos que:

$$\frac{d}{dt} (e^{tA} X_0) = A e^{tA} X_0.$$

Assim, se $X(t) = e^{tA} X_0$:

$$\frac{d}{dt} X(t) = A e^{tA} X_0 = AX(t).$$

Além disso, pela Proposição 1.2, $e^{0 \cdot A} = I$, assim:

$$X(0) = e^{0 \cdot A} X_0 = X_0.$$

Portanto, $X(t) = e^{tA} X_0$ é solução do sistema (2.18).

Suponha que $Y = Y(t)$ seja também solução do sistema (2.18). Definimos:

$$Z(t) = e^{-tA} Y(t).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt}(t) &= \left(\frac{d}{dt} e^{-tA} \right) Y(t) + e^{-tA} \frac{dY}{dt}(t) \\ &= -A e^{-tA} Y(t) + e^{-tA} AY(t) \\ &= e^{-tA} (-A + A) Y(t) = 0. \end{aligned}$$

Assim, $Z(t)$ é constante em relação ao tempo. Além disso, $Z(0) = Y(0) = X_0$. Logo,

$$X_0 = Z(t) = e^{-tA} Y(t).$$

Pela Proposição 1.3, e^{-tA} é a inversa da matriz e^{tA} . Portanto,

$$Y(t) = e^{tA} X_0.$$

Cálculo das soluções usando autovalores

De acordo com a seção anterior para se ter a solução $X = e^{tA} X_0$ do sistema (2.18) é preciso calcular e^{tA} . A seguir desenvolvemos o método de autovalores que leva para esse cálculo.

Seja λ um autovalor da matriz A associado a um autovetor v . De acordo com a Definição 1.10, temos:

$$Av = \lambda v. \quad (2.19)$$

Agora, vamos mostrar que

$$X = ve^{\lambda t}, \quad (2.20)$$

é solução do problema (2.17). Temos que

$$X' = (ve^{\lambda t})' = \lambda ve^{\lambda t}.$$

Multiplicando $e^{\lambda t}$ em ambos os membros da equação (2.19), segue que

$$X' = Ave^{\lambda t}.$$

De acordo com (2.20), temos:

$$X' = AX.$$

Portanto, verificamos que $X = ve^{\lambda t}$ é solução do sistema (2.17).

Suponha que a matriz A possua um conjunto completo de n autovetores v_1, v_2, \dots, v_n que são linearmente independentes. Seja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores correspondentes. Como visto acima as funções

$$X_1 = v_1 e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad X_n = v_n e^{\lambda_n t}$$

são soluções do problema (2.17).

Para mostrar que estas soluções constituem um conjunto fundamental, calculamos o respectivo wronskiano:

$$\begin{aligned} W[X_1, X_2, \dots, X_n] &= \begin{vmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{12}e^{\lambda_2 t} & \dots & v_{1n}e^{\lambda_n t} \\ v_{21}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} & \dots & v_{2n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1}e^{\lambda_1 t} & v_{n2}e^{\lambda_2 t} & \dots & v_{nn}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Como a função exponencial nunca se anula e os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes, o produto acima não é nulo. Dessa forma, X_1, X_2, \dots, X_n constituem um conjunto fundamental de soluções. Assim, pelo Teorema 2.6, a solução geral do sistema (2.17) é:

$$X = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}. \quad (2.21)$$

Nesse momento, vamos estudar os diferentes casos que dependem se os autovalores são: reais e distintos, multiplicidade maior que 1 ou complexos.

Autovalores Reais Distintos: Se a matriz A , $n \times n$ possui n autovalores reais distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sejam v_1, v_2, \dots, v_n os n autovetores linearmente independentes, então, a solução geral de (2.17) no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dado por: $X = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$, com c_1, c_2, \dots, c_n constantes.

Exemplo 2.8 Encontre a solução geral do sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2. \end{cases} \quad (2.22)$$

Resolução:

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, então o sistema (2.22) pode ser escrito na forma:

$$X' = AX.$$

Da equação $(A - \lambda I)v = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= [(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6] \\ &= 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 \\ &= -4 - 3\lambda + \lambda^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.

Para $\lambda_1 = -1$, devemos encontrar w_1 e z_1 tal que

$$\begin{cases} 3w_1 + 3z_1 = 0 \\ 2w_1 + 2z_1 = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Resolvendo o sistema (2.24), temos: $w_1 = -z_1$. Tomando, $z_1 = -1$, temos:

$w_1 = 1$, logo o autovetor é dado por: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 4$, devemos encontrar w_2 e z_2 tal que

$$\begin{cases} -2w_2 + 3z_2 = 0 \\ 2w_2 - 3z_2 = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Resolvendo o sistema (2.25), $w_2 = 3z_2/2$. Tomando, $z_2 = 2$, temos: $w_2 = 3$, logo o autovetor é dado por: $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Portanto, $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$, e a solução geral do sistema (2.22) é dada por:

$$X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t},$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Autovalores de Multiplicidade $k > 1$: Cada autovalor λ da matriz A de ordem $n \times n$ tem associado um autovetor v . Se o autovalor tem multiplicidade $k > 1$, então ele pode ter menos que k autovetores linearmente independentes. Nesse caso não é possível encontrar um conjunto de n autovetores linearmente independentes. Diremos, que um autovalor tem multiplicidade $k > 1$ é completo se possui k autovetores linearmente independentes. No caso da matriz A possuir autovalores completos, a solução geral do sistema $X' = AX$ é dada por (2.21), com λ_i podendo se repetir.

Exemplo 2.9 Encontre a solução geral do sistema $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Fazendo o mesmo procedimento da resolução do Exemplo 2.8, podemos encontrar os seguintes autovalores e autovetores: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Neste caso, o autovalor $\lambda_1 = -1$ tem

multiplicidade 2 e é completo, assim, temos dois autovetores v_1 e v_2 linearmente independentes correspondentes a $\lambda_1 = -1$. Como A possui três autovetores linearmente independentes, a solução geral é:

$$X(t) = c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{-t} v_2 + c_3 e^{5t} v_3 = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Autovalores de Multiplicidade 2: Seja λ um autovalor de multiplicidade 2 associado a um único autovetor v . Além da solução $X_1 = e^{\lambda t} v$ uma segunda solução linearmente independente pode ser obtida fazendo,

$$X_2 = K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t} \quad (2.26)$$

$$X_2' = K \lambda t e^{\lambda t} + K e^{\lambda t} + P \lambda e^{\lambda t}. \quad (2.27)$$

Agora, vamos substituir (2.26) e (2.27) no sistema $X' = AX$. Então, obtemos

$$(AK - \lambda K) t e^{\lambda t} + (AP - \lambda P - K) e^{\lambda t} = 0. \quad (2.28)$$

Como a equação (2.28) deve ser válida para todo t , os vetores K e P devem satisfazer as seguintes equações:

$$(A - \lambda I)K = 0 \quad (2.29)$$

$$(A - \lambda I)P = K. \quad (2.30)$$

A equação (2.29) estabelece que K deve ser um autovetor associado a λ . Resolvendo (2.29), temos uma solução $X_1 = K e^{\lambda t}$. Sabendo o valor de K a equação (2.30) permite determinar o vetor P .

Autovalores de Multiplicidade 3: Seja λ um autovalor de multiplicidade 3 associado a um único autovetor v . Além da solução $X_1 = e^{\lambda t}v$ uma segunda solução linearmente independente pode ser obtida fazendo,

$$X_2 = Kte^{\lambda t} + Pe^{\lambda t}$$

e uma terceira solução linearmente independente é obtida fazendo,

$$X_3 = K\frac{t^2}{2}e^{\lambda t} + Pte^{\lambda t} + Qe^{\lambda t}. \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) no sistema $X' = AX$, obtemos as seguintes equações:

$$(A - \lambda I)K = 0 \quad (2.32)$$

$$(A - \lambda I)P = K \quad (2.33)$$

$$(A - \lambda I)Q = P. \quad (2.34)$$

Os vetores K , P e Q devem satisfazer (2.32), (2.33) e (2.34).

Autovalores Complexos: Se a matriz A possui n autovalores complexos e distintos, então existem n autovetores linearmente independentes. Uma vez que a matriz A é real, os autovalores complexos surgem em pares de autovalores conjugados. Assim, $\lambda = p + qi$ e $\bar{\lambda} = p - qi$ formam um par de autovalores conjugados. Seja v um autovetor associado a λ , então, $(A - \lambda I)v = 0$ e tomando o complexo conjugado desta equação obtemos: $(A - \bar{\lambda}I)\bar{v} = 0$. Assim, \bar{v} é o autovetor associado ao autovalor $\bar{\lambda}$. Se $v = v_R + iv_I$, então $\bar{v} = v_R - iv_I$. A solução complexa associada ao par (λ, v) é dada por:

$$X(t) = ve^{(p+qi)t} = (v_R + iv_I)e^{pt}(\cos(qt) + i\sin(qt)),$$

ou seja,

$$X(t) = e^{pt}(v_R \cos(qt) - v_I \sin(qt)) + ie^{pt}(v_I \cos(qt) + v_R \sin(qt)).$$

Teorema 2.9 (*Soluções Correspondentes a Autovalores Complexos*) *Seja A a matriz dos coeficientes com elementos reais do sistema homogêneo (2.17) e seja v um autovetor correspondente ao autovalor complexo $\lambda = p + qi$, p e q reais, então $ve^{\lambda t}$ e $\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$ são soluções do sistema (2.17).*

Teorema 2.10 (*Soluções Reais Correspondentes a Autovalores Complexos*) *Seja $\lambda = p + qi$ um autovalor complexo da matriz de coeficientes A no sistema (2.17) e seja $v = v_R + iv_I$ o autovetor associado a λ , então $X_1 = R_e(X) = e^{pt}(v_R \cos(qt) - v_I \sin(qt))$ e $X_2 = Im(X) = e^{pt}(v_I \cos(qt) + v_R \sin(qt))$ são soluções linearmente independentes do sistema (2.17) no intervalo $(-\infty, \infty)$.*

A parte real e a parte imaginária de $X = X_1 + iX_2$ são soluções da equação, deste modo obtemos duas soluções reais, linearmente independentes.

$$\begin{aligned} X_1 &= R_e(X) = e^{pt}(v_R \cos(qt) - v_I \sin(qt)) \\ X_2 &= Im(X) = e^{pt}(v_I \cos(qt) + v_R \sin(qt)). \end{aligned}$$

De fato, se X é solução, temos:

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ (X_1 + iX_2)' &= A(X_1 + iX_2) \\ X_1' + iX_2' &= AX_1 + iAX_2. \end{aligned}$$

Logo, $X_1' = AX_1$ e $X_2' = AX_2$. Assim, mostramos que a parte real e a parte imaginária da solução complexa são soluções reais da equação.

Exemplo 2.10 Encontre a solução geral do sistema $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Fazendo o mesmo procedimento da resolução do Exemplo 2.8, podemos encontrar os seguintes autovalores e autovetores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$ e $\lambda_3 = 1-i$,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral complexa é dada por:

$$X(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{(1+i)t} v_2 + c_3 e^{(1-i)t} v_3,$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são constantes.

Assim,

$$e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t (\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + i e^t \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Ora, a parte real e a parte imaginária desta solução complexa são soluções reais, linearmente independentes, portanto a solução geral real é dada por:

$$X(t) = c_4 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_5 e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_6 e^t \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

onde, c_4 , c_5 e c_6 são constantes reais.

2.4.2 Sistemas Não-Homogêneos: Variação de Parâmetros

Nesta seção vamos estudar uma versão matricial do método da variação de parâmetros para um sistema linear não-homogêneo de n equações diferenciais de primeira ordem e n incógnitas.

Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes. Se $X_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ forem n soluções linearmente independentes do sistema homogêneo $X' = AX$ no intervalo I , então a solução geral é dada por:

$$X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$$

ou

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 x_{11} + \dots + c_n x_{1n} \\ c_1 x_{21} + \dots + c_n x_{2n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + \dots + c_n x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Podemos então dizer que a solução geral pode ser representada na forma matricial por: $X(t) = \Phi(t)C$, onde:

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Chamamos a matriz Φ de matriz fundamental do sistema $X' = AX$ no intervalo I .

Propriedade 2.1 Propriedades da Matriz Fundamental

- (a) Uma matriz fundamental Φ é não-singular.
- (b) Se Φ é matriz fundamental do sistema $X' = AX$, então $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

Agora, vamos considerar o seguinte sistema não-homogêneo:

$$X'(t) = AX(t) + F(t). \quad (2.35)$$

De forma análoga ao procedimento do método da variação de parâmetros para uma equação diferencial de ordem n , vamos determinar uma solução particular variando a matriz das constantes, C , logo, temos que determinar

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \text{ de tal forma que: } X_p = \Phi(t)U(t) \text{ seja uma solução parti-}$$

cular do sistema não-homogêneo (2.35).

Derivando X_p temos: $X'_p = \Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t)$ e substituindo na equação (2.35) temos: $\Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t)$, mas pela Propriedade 2.1 item (b) $\Phi' = A\Phi(t)$, assim, $\Phi(t)U'(t) + A\Phi(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t)$, logo: $\Phi(t)U'(t) = F(t)$. De acordo com a Propriedade 2.1 item (a), Φ é não-singular e portanto existe Φ^{-1} . Então,

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t). \quad (2.36)$$

Integrando (2.36), temos: $U(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t) dt$.

Como $X_p = \Phi(t)U(t)$ podemos concluir que uma solução particular do sistema não-homogêneo $X'(t) = AX(t) + F(t)$ é

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t) dt. \quad (2.37)$$

Como procuramos uma solução particular qualquer, não é necessário usar uma constante de integração no cálculo da integral $\int \Phi^{-1}(t)F(t) dt$. Para calcular a solução geral do sistema não-homogêneo, $X = X_h + X_p$, vamos integrar cada entrada da matriz coluna $\Phi^{-1}(t)F(t)$ em (2.37), assim, temos:

$$X = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t) dt.$$

Exemplo 2.11 *Encontre a solução geral do sistema não-homogêneo:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 + 3t \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 4x_2 + e^{-t}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Resolução:

Primeiramente, vamos apresentar o sistema (2.38) na sua forma matricial:

$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos resolver o seguinte sistema homogêneo, $X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X$. Os autovalores da matriz são: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -5$ e os autovetores são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz fundamental do sistema é $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix}$.

Logo, $\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}$.

Assim, a solução particular do sistema (2.38) é dada por:

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ \frac{t}{5}e^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix},$$

ou seja, $X_p = \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$.

Então, a solução geral do sistema (2.38) é dada por:

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Problema de Valor Inicial: Consideremos o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + F(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (2.39)$$

A solução geral do sistema não-homogêneo (2.39) pode ser escrita da seguinte forma:

$$X = \Phi(t)C + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s) ds.$$

Os limites de integração foram escolhidos de tal modo que a solução particular anula-se no instante inicial, $t = t_0$. Fazendo, $t = t_0$ em (2.39), temos: $X(t_0) = \Phi(t_0)C$, assim, $C = \Phi^{-1}(t_0)X_0$. Então, a solução do problema de valor inicial (PVI) é dada por:

$$X = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s) ds. \quad (2.40)$$

Exemplo 2.12 Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 2x_2 - 15te^{-2t} \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 - 4te^{-2t} \\ x_1(0) = 7 \quad e \quad x_2(0) = 3. \end{cases} \quad (2.41)$$

Resolução:

Primeiramente, vamos apresentar o sistema (2.41) na sua forma matricial:

$$\begin{cases} X' = AX + F(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} -15te^{-2t} \\ -4te^{-2t} \end{bmatrix} \quad e \quad X_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos resolver o seguinte sistema homogêneo: $X' = AX$. Os autovalores e os autovetores da matriz A são: $\lambda_1 = -2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\lambda_2 = 5$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Logo, a matriz fundamental é dada por:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} \\ 3e^{-5t} & e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(0)X_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{48}{7}e^{5t} \\ -\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{24}{7}e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\Phi^{-1}(s)F(s) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{2s} & -2e^{2s} \\ 3e^{-5s} & e^{-5s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15se^{-2s} \\ -4se^{-2s} \end{bmatrix},$$

assim,

$$\Phi^{-1}(s)F(s) = \begin{bmatrix} -s \\ -7se^{-7s} \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos calcular as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^t -s \, ds &= -\frac{t^2}{2} \\ \int_0^t (-7se^{-7s}) \, ds &= -\frac{1}{7} + \frac{1}{7}e^{-7t} + te^{-7t} \end{aligned}$$

para obter a solução geral do PVI.

Portanto, de acordo com a equação (2.40), temos:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{48}{7}e^{5t} \\ -\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{24}{7}e^{5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{7} + \frac{1}{7}e^{-7t} + te^{-7t} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{48}{7}e^{5t} \\ -\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{24}{7}e^{5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t}t^2 + 2e^{5t}(-\frac{1}{7} + \frac{1}{7}e^{-7t} + te^{-7t}) \\ \frac{3}{2}e^{-2t}t^2 + e^{5t}(-\frac{1}{7} + \frac{1}{7}e^{-7t} + te^{-7t}) \end{bmatrix}.$$

Enfim, obtemos a solução do problema do valor inicial, dada por:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{46}{7}e^{5t} - \frac{1}{2}e^{-2t}t^2 + 2te^{-2t} \\ -\frac{2}{7}e^{-2t} + \frac{23}{7}e^{5t} + \frac{3}{2}e^{-2t}t^2 + te^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Capítulo 3

Aplicações

A modelagem de muitos problemas que aparecem na Física, na Engenharia, na Química e em outras áreas, resultam em um sistema de equações diferenciais. Neste capítulo vamos apresentar alguns exemplos desse tipo de problema. Os problemas que vamos resolver podem ser encontrados em [7], [10] e [20].

3.1 Problemas do Sistema Massa-Mola

Considere um corpo de massa m preso a uma das extremidades de uma mola horizontal cuja outra extremidade está fixa, conforme a figura 3.1. O sistema possui um ponto de equilíbrio onde definimos a origem do sistema de coordenadas.

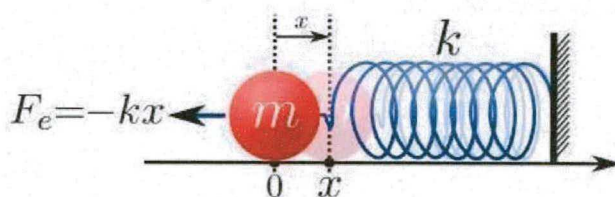


Figura 3.1: Sistema massa-mola

Segundo a Lei de Hooke, ao empurrarmos o corpo preso à mola até uma posição $x > 0$ surge uma força restauradora proporcional a distância em relação ao ponto de equilíbrio e no sentido contrário do deslocamento, $F_e = -kx$, que tenta trazê-lo de volta para a situação inicial. À medida que afastamos o corpo de massa m da posição de equilíbrio, a intensidade da força restauradora vai aumentando. Se puxarmos o corpo de massa m para a esquerda da posição $x_0 = 0$, uma força de sentido contrário e proporcional ao deslocamento x surgirá tentando mantê-lo na posição de equilíbrio.

Na sequência vamos usar a segunda lei de Newton:

Segunda Lei do movimento de Newton: *A força resultante que atua sobre um corpo é igual à taxa de variação do momento deste corpo em relação ao tempo, ou, para uma massa constante,*

$$F = m \frac{dv}{dt},$$

onde F é a força resultante que atua sobre o corpo e v é a velocidade do corpo, ambas no instante de tempo t .

Se as forças de atrito, tanto entre as superfícies de contato como do meio externo (resistência do ar) forem desprezadas, F_e será a única força atuando sobre o sistema, logo, pela Segunda Lei de Newton,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (3.1)$$

A equação diferencial de segunda ordem (3.1), descreve o movimento do corpo preso à mola. Agora, considerando as condições iniciais: $x(0) = 0$ posição inicial e $v(0) = v_0$ velocidade inicial, temos o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \\ x(0) = 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

O problema (3.2) pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Seja v a velocidade do corpo, ou seja, $v = \frac{dx}{dt}$, assim, o problema (3.2) pode ser representado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x \\ x(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(0) = v_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Escrevemos o sistema (3.3) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Seja w a frequência circular do movimento harmônico simples, temos: $w^2 = \frac{k}{m}$. Logo o sistema (3.3), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

onde A é a matriz dos coeficientes: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}$.

Agora, vamos determinar os autovalores da matriz A . Usando a Definição 1.10, temos que encontrar λ tal que $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + w^2 = 0$. Assim, os autovalores da matriz A são: $\lambda_1 = wi$ e $\lambda_2 = -wi$.

Para $\lambda_1 = wi$, temos: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ wi \end{bmatrix}$ e para $\lambda_2 = -wi$, temos: $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -wi \end{bmatrix}$.

Portanto, a solução geral complexa é: $X(t) = c_1 e^{(wi)t} v_1 + c_2 e^{(-wi)t} v_2$, com c_1 e c_2 constantes complexas.

Vamos considerar a seguinte solução complexa associada a $\lambda_1 = wi$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ wi \end{bmatrix}$:

$$e^{(0+wi)t} \begin{bmatrix} 1 \\ wi \end{bmatrix} = e^{0t} (\cos(wt) + i \sin(wt)) \begin{bmatrix} 1 \\ wi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(wt) \\ -w \sin(wt) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(wt) \\ w \cos(wt) \end{bmatrix}.$$

Como, $p = 0$, segue do Teorema 2.10 que a solução geral é dada por:

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(wt) \\ -w \sin(wt) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(wt) \\ w \cos(wt) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(wt) + c_2 \sin(wt), \\ v(t) &= -c_1 w \sin(wt) + c_2 w \cos(wt). \end{aligned}$$

Substituindo as seguintes condições iniciais, $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$, temos:

$$x(0) = c_1 = 0 \quad \text{e} \quad v(0) = c_2 w = v_0.$$

Portanto, a função posição do móvel é dada por:

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

Sistema massa-mola com duas massas e três molas

A seguir, vamos descrever um sistema de massa-mola com duas massas m_1 e m_2 e três molas com coeficientes de elasticidades k_1 , k_2 e k_3 .

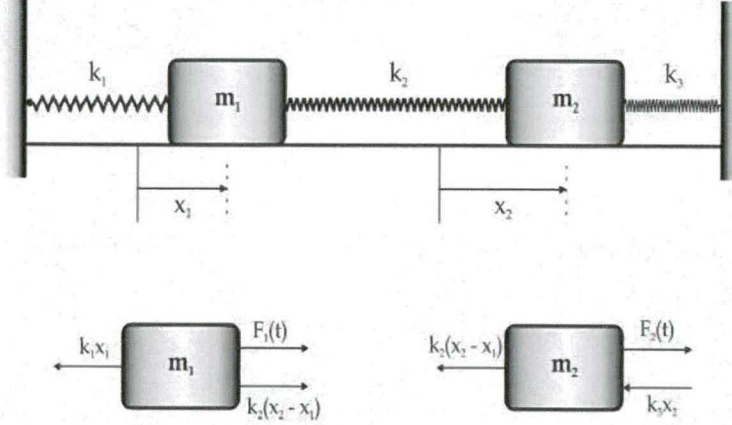


Figura 3.2: Sistema Massa Mola

Sejam $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$ e para essa situação temos: $x_2 > x_1$, os deslocamentos das massas em relação às suas posições de equilíbrio no instante t . Vamos isolar m_1 e m_2 e considerar todas as forças que atuam nas mesmas conforme a figura 3.2, ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton em cada uma das massas, obtemos as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

ou

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{(k_1 + k_2)x_1}{m_1} + \frac{k_2 x_2}{m_1} + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{k_2 x_1}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)x_2}{m_2} + \frac{F_2(t)}{m_2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

O sistema (3.5) pode ser transformado num sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Sejam v_1, v_2 as velocidades dos corpos com massa m_1 e m_2 , ou seja, $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$ e $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$, assim, o sistema (3.5) pode ser

representado por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_1}{dt} = -\frac{(k_1 + k_2)x_1}{m_1} + \frac{k_2x_2}{m_1} + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{k_2x_1}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)x_2}{m_2} + \frac{F_2(t)}{m_2} \end{cases} \quad (3.6)$$

Agora, vamos considerar o sistema (3.6) com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_1}{dt} = -\frac{(k_1 + k_2)x_1}{m_1} + \frac{k_2x_2}{m_1} + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{k_2x_1}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)x_2}{m_2} + \frac{F_2(t)}{m_2} \\ x_1(0) = x_{1,0} \quad x_2(0) = x_{2,0} \quad v_1(0) = v_{1,0} \quad v_2(0) = v_{2,0}. \end{cases}$$

Exemplo 3.1 Considerando o sistema massa-mola da figura 3.2, com $F_1(t) = F_2(t) = 0$, nesse caso não temos forças externas atuando sobre as massas, temos:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_1}{dt} = -\frac{(k_1 + k_2)x_1}{m_1} + \frac{k_2x_2}{m_1} \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{k_2x_1}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)x_2}{m_2} \\ x_1(0) = x_{1,0} \quad x_2(0) = x_{2,0} \quad v_1(0) = v_{1,0} \quad v_2(0) = v_{2,0}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Escrevemos o sistema (3.7) na forma matricial:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução do sistema (3.7) é dada por: $X(t) = e^{At} X_0$.

Exemplo 3.2 *Suponha agora que o sistema massa-mola esteja sujeito a força de atrito entre a superfície e os corpos e que essa força seja proporcional às velocidades dos corpos. Neste caso, teríamos que acrescentar dois termos da forma $\gamma_1 x'_1$ e $\gamma_2 x'_2$ respectivamente na primeira e segunda equação do sistema (3.4). Assim, temos o sistema:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_1}{dt} = -\frac{(k_1 + k_2)x_1}{m_1} + \frac{k_2 x_2}{m_1} - \frac{\gamma_1}{m_1} v_1 + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{k_2 x_1}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)x_2}{m_2} - \frac{\gamma_2}{m_2} v_2 + \frac{F_2(t)}{m_2} \\ x_1(0) = x_{1,0} \quad x_2(0) = x_{2,0} \quad v_1(0) = v_{1,0} \quad v_2(0) = v_{2,0}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Escrevemos o sistema (3.8) na forma matricial:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + F \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

onde,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{\gamma_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & 0 & -\frac{\gamma_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{F_2(t)}{m_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{bmatrix}.$$

De acordo com o Teorema 2.7, a solução do sistema (3.8) é dada por: $X(t) = X_h + X_p$, onde X_p é uma solução particular do sistema não-homogêneo e X_h é a solução geral do sistema homogêneo correspondente.

Exemplo 3.3 Resolva o sistema (3.7) considerando $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, sabendo que nenhuma força externa age sobre as massas e que as duas massas estejam inicialmente nas suas posições de equilíbrio com as seguintes velocidades $x'_1(0) = 1$ e $x'_2(0) = -1$.

Resolução:

Sejam $x_1(0) = x_2(0) = 0$ as posições de equilíbrio, então temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_1}{dt} = -2x_1 + x_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = x_1 - 2x_2 \\ x_1(0) = 0 \quad x_2(0) = 0 \quad v_1(0) = 1 \quad v_2(0) = -1. \end{cases} \quad (3.9)$$

O sistema (3.9), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos determinar os autovalores da matriz A . Usando a Definição 1.10, temos que encontrar λ tal que $\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0$. Assim, os autovalores da matriz A são: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = \sqrt{3}i$ e $\lambda_4 = -\sqrt{3}i$ e os autovetores associados são: $\mathbf{v}_1 = (1, 1, i, i)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -i, -i)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -1, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, -1, -\sqrt{3}i, \sqrt{3}i)$.

Portanto, temos:

$$\mathbf{v}_1 e^{it} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 e^{\sqrt{3}it} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i \end{bmatrix} (\cos(\sqrt{3}t) + i \sin(\sqrt{3}t)) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução geral do sistema (3.9) é dada por:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}.$$

Usando as condições iniciais do sistema (3.9), temos:

$$X = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}.$$

3.2 Problemas de Diluição

Exemplo 3.4 *Suponha que numa indústria, dois tanques estão interligados conforme a figura abaixo.*

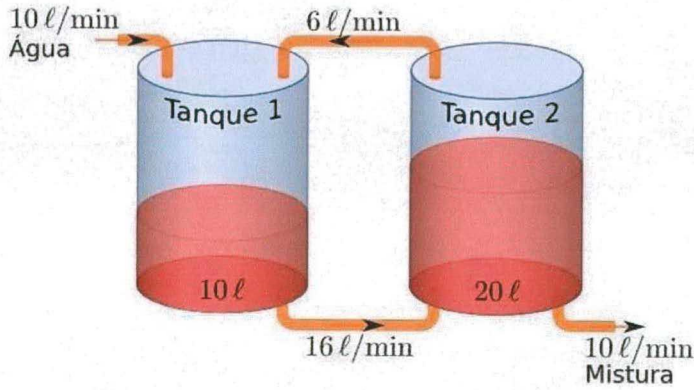


Figura 3.3: Tanques interligados

No instante de tempo $t = 0$, o tanque 1 contém 10 litros de água pura e o tanque 2 contém 20 litros de uma mistura de água com 12 litros de vinho. A água pura está sendo constantemente bombeada para dentro do tanque 1 a uma taxa de 10 litros por minuto, as misturas de água com vinho são trocadas entre os dois tanques: passa do tanque 1 para o tanque 2 a uma taxa de 16 litros por minuto e do tanque 2 para o tanque 1 a uma taxa de 6 litros por minuto. A mistura escoar do tanque 2 para fora a uma taxa de 10 litros por minuto. Encontre a quantidade de vinho em cada tanque no instante de tempo t .

Resolução:

Sabemos que a quantidade de líquido que entra em cada tanque é igual à quantidade que sai, assim, o volume da mistura em cada tanque permanece constante. Então o tanque 1 contém sempre 10 litros de mistura e o tanque 2 contém sempre 20 litros de mistura. Sejam $Q_1(t)$ a quantidade de vinho no tanque 1 no instante t e $Q_2(t)$ a quantidade de vinho no tanque 2 no instante t .

As taxas de variação instantânea da quantidade de vinho em cada tanque são respectivamente:

$$Q_1'(t) = \frac{dQ_1}{dt} \quad \text{e} \quad Q_2'(t) = \frac{dQ_2}{dt}.$$

Cada uma dessas taxas deve ser igual à diferença entre a taxa à qual o vinho está entrando menos a taxa à qual o vinho está saindo do respectivo tanque. Logo, no tanque 1, a taxa de entrada de vinho é igual à:

$$10 \frac{\ell}{\text{min}} \cdot 0 \frac{\ell}{\ell} + 6 \frac{\ell}{\text{min}} \cdot \frac{Q_2(t)}{20} \frac{\ell}{\ell} = \frac{3}{10} Q_2(t) \frac{\ell}{\text{min}},$$

enquanto que a taxa de saída do vinho é igual à:

$$16 \frac{\ell}{\text{min}} \cdot \frac{Q_1(t)}{10} \frac{\ell}{\ell} = \frac{8}{5} Q_1(t) \frac{\ell}{\text{min}}.$$

Portanto,

$$\frac{dQ_1}{dt}(t) = \frac{3}{10} Q_2(t) - \frac{8}{5} Q_1(t).$$

No tanque 2, a taxa à qual o vinho está entrando é igual a:

$$16 \frac{\ell}{\text{min}} \cdot \frac{Q_1(t)}{10} \frac{\ell}{\ell} = \frac{8}{5} Q_1(t) \frac{\ell}{\text{min}},$$

enquanto que a taxa à qual o vinho está saindo é igual a:

$$(10 + 6) \frac{\ell}{\text{min}} \cdot \frac{Q_2(t)}{20} \frac{\ell}{\ell} = \frac{4}{5} Q_2(t) \frac{\ell}{\text{min}}.$$

Portanto,

$$\frac{dQ_2}{dt}(t) = \frac{8}{5} Q_1(t) - \frac{4}{5} Q_2(t).$$

As condições iniciais são: $Q_1(0) = 0 \ell$ e $Q_2(0) = 12 \ell$, segue que as quantidades de vinho em cada tanque no instante de tempo t , podem ser obtidas resolvendo o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt}(t) = -\frac{8}{5}Q_1(t) + \frac{3}{10}Q_2(t) \\ \frac{dQ_2}{dt}(t) = \frac{8}{5}Q_1(t) - \frac{4}{5}Q_2(t) \\ Q_1(0) = 0 \\ Q_2(0) = 12. \end{cases} \quad (3.10)$$

Podemos escrever o sistema (3.10) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_1(0) \\ Q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

A matriz formada pelos coeficientes é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Os autovalores da matriz A são: $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$, $\lambda_2 = -2$ e os autovetores associados são: $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{4}, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-\frac{3}{4}, 1)$.

De acordo com a Definição 2.4 os dois autovetores são linearmente independentes, então pelo Teorema 2.6, a solução geral do sistema (3.10) é dada por:

$$\mathbf{Q}(t) = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-2t} \mathbf{v}_2,$$

ou seja,

$$Q_1(t) = \frac{1}{4}c_1 e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{3}{4}c_2 e^{-2t}, \quad (3.11)$$

$$Q_2(t) = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} + c_2 e^{-2t}. \quad (3.12)$$

Substituindo as seguintes condições iniciais $Q_1(0) = 0$ na equação (3.11) e $Q_2(0) = 12$ na equação (3.12), temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 12. \end{cases} \quad (3.13)$$

Resolvendo o sistema (3.13), temos: $c_1 = 9$ e $c_2 = 3$, portanto a solução do PVI é dada por:

$$Q_1(t) = \frac{9}{4}e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4}e^{-2t},$$

$$Q_2(t) = 9e^{-\frac{2}{5}t} + 3e^{-2t}.$$

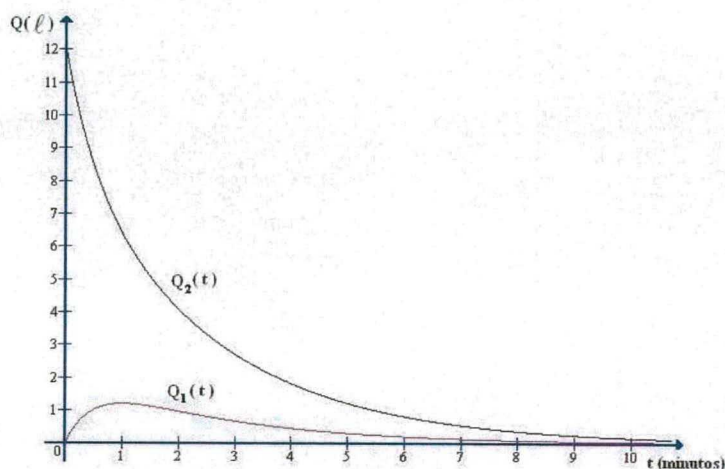


Figura 3.4: Gráfico

Exemplo 3.5 Considere dois tanques interligados como na figura 3.5. O tanque 1 contém, inicialmente, 30 gal de água e 25 oz de sal, e o tanque 2 contém, inicialmente, 20 gal de água e 15 oz de sal. Entra no tanque 1 uma mistura de água contendo 1 oz de sal por galão a uma taxa de 1,5 gal/min. A mistura flui do tanque 1 para o tanque 2 a uma taxa de 3 gal/min. Entra, também, no tanque 2, vinda de fora, uma mistura de água contendo 3 oz de sal por galão a uma taxa de 1 gal/min. A mistura escorre do tanque 2 a uma taxa de 4 gal/min e parte dela volta para o tanque 1 a uma taxa de 1,5 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.

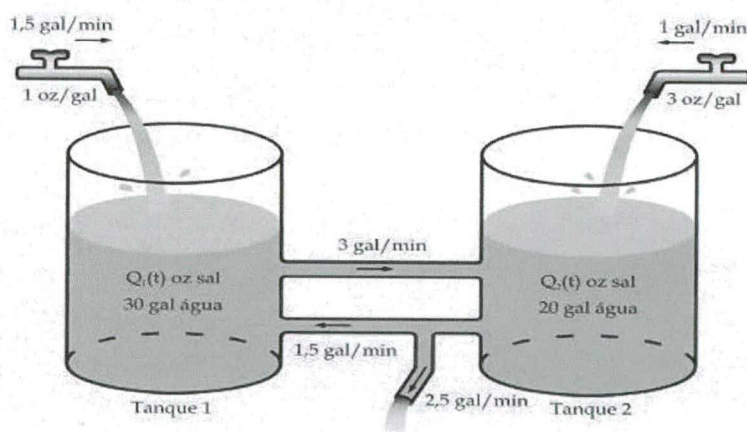


Figura 3.5: Tanques interligados

- Determine o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que descreve as quantidades de sal $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, nos tanques 1 e 2, em função do tempo.
- Resolva o sistema encontrado no item (a), determinando $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$.

(a) Resolução:

Observamos que os volumes do tanque 1 e 2 não mudam com o tempo, pois, estão em equilíbrio, a quantidade de solução que entra é igual à quantidade que sai dos tanques. Agora, sejam $Q_1(t)$ a quantidade de sal no tanque 1 no instante t e $Q_2(t)$ a quantidade de sal no tanque 2 no instante t . Assim, a concentração de solução nos tanques 1 e 2 em cada instante é dada por: $\frac{Q_1(t)}{30}$ e $\frac{Q_2(t)}{20}$ respectivamente.

A taxa de variação instantânea da quantidade de sal em cada tanque é igual a taxa de entrada menos a taxa de saída, assim temos:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt}(t) = 1,5 + 1,5 \frac{Q_2(t)}{20} - 3 \frac{Q_1(t)}{30} \\ \frac{dQ_2}{dt}(t) = 3 + 3 \frac{Q_1(t)}{30} - 4 \frac{Q_2(t)}{20}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Portanto, temos o seguinte PVI, formado pelo sistema de equações diferenciais linear não-homogêneo:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt}(t) = -\frac{Q_1(t)}{10} + 3 \frac{Q_2(t)}{40} + \frac{3}{2} \\ \frac{dQ_2}{dt}(t) = \frac{Q_1(t)}{10} - \frac{Q_2(t)}{5} + 3 \\ Q_1(0) = 25 \\ Q_2(0) = 15. \end{cases} \quad (3.15)$$

Podemos escrever o sistema (3.15) da seguinte forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} Q_1(0) \\ Q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} Q'(t) = A Q(t) + F(t) \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

com

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

(b) Resolução:

Primeiramente, vamos resolver o sistema homogêneo associado,

$$\begin{cases} Q'(t) = AQ(t) \\ Q(0) = Q_0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Os autovalores da matriz A são: $\lambda_1 = -\frac{1}{20}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ e os autovetores associados são: $\mathbf{v}_1 = (1, \frac{2}{3})$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -2)$.

De acordo com a Definição 2.4 os dois autovetores são linearmente independentes, então pelo Teorema 2.6, a solução do sistema homogêneo (3.16) é dada por:

$$Q_h(t) = c_1 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{4}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Nesse momento, vamos usar o método de variação de parâmetros para determinar uma solução particular. A matriz fundamental do sistema é dada por:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{20}t} & e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{20}t} & -2e^{-\frac{1}{4}t} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{\frac{1}{20}t} & \frac{3}{8}e^{\frac{1}{20}t} \\ \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}t} & -\frac{3}{8}e^{\frac{1}{4}t} \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução particular do sistema (3.15) é dada por:

$$Q_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{20}t} & e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{20}t} & -2e^{-\frac{1}{4}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45e^{\frac{1}{20}t} \\ -3e^{\frac{1}{4}t} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$Q_p(t) = \begin{bmatrix} 42 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

Então, a solução geral do sistema (3.15) é dada por:

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t),$$

$$Q(t) = c_1 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{4}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 \\ 36 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$Q_1(t) = c_1 e^{-\frac{1}{20}t} + c_2 e^{-\frac{1}{4}t} + 42, \quad (3.17)$$

$$Q_2(t) = \frac{2}{3}c_1 e^{-\frac{1}{20}t} - 2c_2 e^{-\frac{1}{4}t} + 36. \quad (3.18)$$

Substituindo as seguintes condições iniciais $Q_1(0) = 25$ na equação (3.17) e $Q_2(0) = 15$ na equação (3.18), temos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -17 \\ 2c_1 - 6c_2 = -63. \end{cases} \quad (3.19)$$

Resolvendo o sistema (3.19), temos: $c_1 = -\frac{165}{8}$ e $c_2 = \frac{29}{8}$, portanto a solução geral do PVI é dada por:

$$Q_1(t) = -\frac{165}{8}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{29}{8}e^{-\frac{1}{4}t} + 42,$$

$$Q_2(t) = -\frac{55}{4}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{29}{4}e^{-\frac{1}{4}t} + 36.$$

3.3 Problemas de Circuitos Elétricos

Primeiramente, vamos apresentar alguns conceitos básicos necessários para a abordagem de problemas sobre circuito elétrico.

A teoria de circuitos elétricos envolvendo indutores de indutância L , resistores de resistência R e capacitores de capacitância C , onde L é dado em henrys, R em ohms e C em farads, baseia-se nas leis de Kirchhoff.

Assim, temos:

- (a) **Lei dos nós:** o fluxo total de corrente atravessando cada nó (ou junção) é zero;
- (b) **Lei das malhas:** a diferença de tensão total em cada laço (ou malha) fechado é zero.

Além disso, temos outras relações importantes:

- (1) A **Intensidade da corrente elétrica** é a taxa de variação da carga elétrica Q em relação ao tempo t que atravessa uma seção transversal de um condutor. Assim, temos:

$$Q = CV,$$

$$\frac{dQ}{dt} = I = C \frac{dV}{dt}.$$

- (2) A **lei de Ohm**, estabelece que a diferença de potencial V nos terminais de um resistor de resistência R submetido a uma intensidade da corrente I , é dada por:

$$V = RI(t).$$

- (3) A **capacitância** C de um capacitor submetido a uma carga elétrica Q , com uma diferença de potencial entre as placas indicada por V , é dada por:

$$C = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

- (4) A **indutância** L de um indutor é uma constante relacionada com a diferença de potencial V e com a taxa de variação da intensidade da corrente elétrica em relação ao tempo $\frac{dI}{dt}$. Assim, temos:

$$V = L \frac{dI}{dt}.$$

Se $E = E(t)$ é a diferença de potencial da fonte de alimentação e $I = I(t)$ é a intensidade da corrente elétrica, então, temos:

- (5) V_l é a diferença de potencial nos terminais do indutor:

$$V_l = L \frac{dI}{dt}.$$

- (6) V_r é a diferença de potencial nos terminais do resistor:

$$V_r = RI.$$

- (7) V_c é a diferença de potencial nos terminais do capacitor:

$$V_c = \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du.$$

Assim, usando as leis de Kirchhoff, quando for fechado o interruptor, temos:

$$V_l + V_r + V_c = E(t),$$

ou seja,

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du = E(t).$$

Se $E(t)$ é constante e derivarmos em relação à variável t , temos:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = 0.$$

Se $E(t)$ é uma função diferenciável da variável t , temos:

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C} I(t) = E'(t).$$

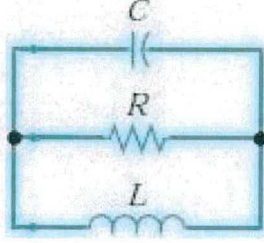


Figura 3.6: Circuito Elétrico RCL em paralelo

Exemplo 3.6 Considere o circuito da figura 3.6. Sejam I_c , I_r e I_l as correntes que passam no capacitor, resistor e indutor, respectivamente. Analogamente, sejam V_c , V_r e V_l as diferenças de tensão correspondentes. Onde arbitrariamente tomamos os sentidos destas correntes como sendo aquele indicado pelas três setas.

Então, pela lei dos nós, temos:

$$I_c + I_r + I_l = 0 \quad (3.20)$$

e pela lei das malhas, temos:

$$V_c - V_r = 0, \quad (3.21)$$

$$V_r - V_l = 0. \quad (3.22)$$

Agora vamos usar as seguintes relações:

$$C \frac{dV_c}{dt} = I_c \quad (3.23)$$

$$\frac{V_r}{R} = I_r \quad (3.24)$$

$$L \frac{dI_l}{dt} = V_l. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.23) e (3.24) em (3.20) temos:

$$C \frac{dV_c}{dt} + \frac{V_r}{R} + I_l = 0. \quad (3.26)$$

Usando (3.21) e (3.22) em (3.25) e (3.26) temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dI_l}{dt} = \frac{V_c}{L} \\ \frac{dV_c}{dt} = -\frac{I_l}{C} - \frac{V_c}{RC} \end{cases} \quad (3.27)$$

Assim, a relação entre a corrente no indutor e queda de tensão no capacitor é dada pelo sistema (3.27).

Exemplo 3.7 Considere o circuito elétrico da figura 3.6, onde I é a corrente passando pelo indutor e V é a queda de voltagem através do capacitor.

(a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes do sistema (3.27) são reais e distintos se $L > 4R^2C$, complexos conjugados se $L < 4R^2C$ e reais iguais se $L = 4R^2C$.

(b) Suponha que $R = \frac{1}{2}$ ohm, $C = 1$ farad e $L = 1$ henry. Encontre a solução geral do sistema (3.27).

(c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2$ ampères e $V(0) = 1$ volt.

(a) **Resolução:**

Ora, podemos escrever o sistema (3.27) da seguinte forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix}.$$

A matriz formada pelos coeficientes é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}.$$

Usando a Definição 1.10, temos que os autovalores da matriz A são os λ tal que $\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{CL} = 0$.

Quando $\Delta = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4\frac{1}{CL} > 0$, temos autovalores reais e distintos, logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4\frac{1}{CL} &> 0 \\ \frac{1}{R^2C^2} &> 4\frac{1}{CL} \\ CL &> 4R^2C^2 \\ L &> 4R^2C. \end{aligned}$$

Quando $\Delta < 0$, temos autovalores complexos conjugados, logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4\frac{1}{CL} &< 0 \\ \frac{1}{R^2C^2} &< 4\frac{1}{CL} \\ CL &< 4R^2C^2 \\ L &< 4R^2C. \end{aligned}$$

Quando $\Delta = 0$, temos autovalores reais iguais, logo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4\frac{1}{CL} &= 0 \\ \frac{1}{R^2C^2} &= 4\frac{1}{CL} \\ CL &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C.\end{aligned}$$

(b) Resolução:

Agora, vamos supor que $R = \frac{1}{2} \text{ ohm}$, $C = 1 \text{ farad}$ e $L = 1 \text{ henry}$. Substituindo esses valores no sistema (3.27), temos:

$$\begin{cases} \frac{dI_l}{dt} = V_c \\ \frac{dV_c}{dt} = -I_l - 2V_c. \end{cases} \quad (3.28)$$

Assim, podemos escrever o sistema (3.28) da seguinte forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_l \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l \\ V_c \end{bmatrix}.$$

A matriz formada pelos coeficientes é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos determinar os autovalores da matriz A . Pela Definição 1.10, devemos encontrar λ tal que $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, ou seja, $(\lambda + 1)^2 = 0$. Temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ é uma raiz de multiplicidade 2. Para esse resultado, temos o único autovetor: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Neste caso, para o autovalor $\lambda_1 = -1$ de multiplicidade 2 está associado um único autovetor, \mathbf{v}_1 , logo temos apenas a solução:

$$\mathbf{X}_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Desejamos encontrar a solução geral do sistema (3.28), então vamos encontrar uma segunda solução da forma:

$$\mathbf{X}_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}, \quad (3.29)$$

onde K e P são vetores linearmente independentes.

Sabemos que $K = \mathbf{v}_1$. Para obter P usamos que:

$$(A + I)P = K.$$

Seja, $P = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a - b = -1. \end{cases}$$

Notamos que o sistema possui equações equivalentes, então existem infinitas soluções a e b . Escolhendo $a = 1$ temos: $b = 0$. Logo, $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim, de (3.29), obtemos:

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Portanto, a solução geral do sistema (3.28), é dada por:

$$\mathbf{X} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \right\}. \quad (3.30)$$

Da equação (3.30), temos:

$$I_l(t) = c_1 e^{-t} + c_2 (te^{-t} + e^{-t}) \quad (3.31)$$

$$V_c(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 (-te^{-t}). \quad (3.32)$$

(c) Resolução:

Agora, vamos encontrar $I(t)$ e $V(t)$ para as seguintes condições iniciais: $I(0) = 2$ ampères e $V(0) = 1$ volt.

Assim, podemos escrever o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dI_l}{dt} = V_c \\ \frac{dV_c}{dt} = -I_l - 2V_c \\ I_l(0) = 2 \quad V_c(0) = 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Substituindo, $I_l(0) = 2$ em (3.31) e $V_c(0) = 1$ em (3.32), temos:

$$\begin{cases} I_l(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ V_c(0) = -c_1 = 1. \end{cases}$$

Assim, $c_1 = -1$ e $c_2 = 3$. Portanto, a solução geral do sistema (3.33) é dada por:

$$I_l(t) = 2e^{-t} + 3te^{-t}$$

$$V_c(t) = e^{-t} - 3te^{-t}.$$

3.4 Problema de Lançamento de Corpos

Nesta seção, vamos estudar o problema de lançamento de corpos verticalmente para cima.

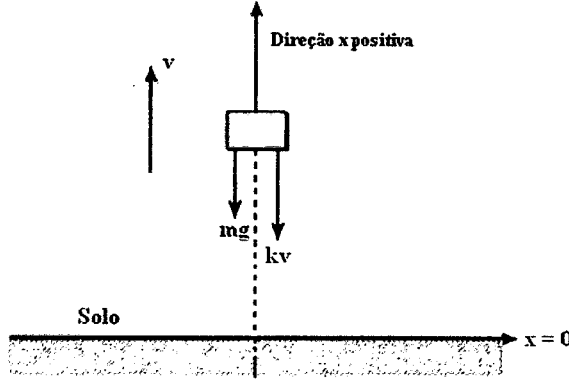


Figura 3.7: Lançamento vertical para cima

Considere um corpo de massa m . Tomemos a origem no ponto de lançamento e orientemos o eixo com sentido positivo para cima. Denotemos $x(t)$ a distância da massa em relação a origem O no instante t e $v(t)$ a velocidade do corpo no instante de tempo t . Note que temos duas forças atuando sobre o corpo, a força de gravidade dada por $-mg$ e a força de resistência do ar, a qual assumimos proporcional a velocidade, dada por $-kv$, onde $k \geq 0$ é a constante de proporcionalidade. Essas forças atuam na direção negativa (para baixo), a força resultante que atua sobre o corpo é dada por: $F = -mg - kv$. Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - kv. \quad (3.34)$$

A equação (3.34) pode ser transformada no seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v - g \\ x(0) = 0 \quad v(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.35)$$

onde v_0 é a velocidade inicial e $x(0) = 0$ significa que o corpo está inicialmente na origem.

O sistema (3.35) pode ser escrito da forma:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + F(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, vamos resolver o sistema homogêneo associado,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Usando a Definição 1.10, temos que os autovalores da matriz A são: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -\frac{k}{m}$ e os autovetores associados são: $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -\frac{k}{m})$.

Para $\lambda_1 = 0$, temos: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e para $\lambda_2 = -\frac{k}{m}$, temos: $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$.

De acordo com a Definição 2.4 os dois autovetores são linearmente independentes, então pelo Teorema 2.6, a solução geral do sistema homogêneo (3.36) é dada por:

$$\mathbf{X}_h(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-\frac{k}{m}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{k}{m} \end{bmatrix}.$$

Vamos usar o método de variação de parâmetros para determinar uma solução particular. A matriz fundamental do sistema é dada por:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{k}{m}t} \\ 0 & -\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{k} \\ 0 & -\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} \end{bmatrix}.$$

Assim, uma solução particular do sistema (3.35) é dada por:

$$\mathbf{X}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t) dt = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{k}{m}t} \\ 0 & -\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{mg}{k}t \\ \frac{m^2g}{k^2}e^{\frac{k}{m}t} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{bmatrix} -\frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2} \\ -\frac{mg}{k} \end{bmatrix}.$$

Então, a solução geral do sistema (3.35) é dada por:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t),$$

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-\frac{k}{m}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{k}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2} \\ -\frac{mg}{k} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2},$$

$$v(t) = -\frac{k}{m}c_2 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}.$$

Substituindo as condições iniciais, $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$, temos: $c_1 = v_0 \frac{m}{k}$ e $c_2 = -v_0 \frac{m}{k} - \frac{m^2g}{k^2}$.

Portanto, a função que descreve o movimento do corpo é dado por:

$$x(t) = \frac{v_0 km + m^2g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t.$$

Considerações Finais

No presente trabalho, observou-se a necessidade de modelar problemas aplicados em diversas áreas fazendo o uso de sistemas de equações diferenciais lineares, onde cada situação é resolvida usando métodos diferenciados para chegar a solução. Além disso, mostrou-se a aplicabilidade do uso dos métodos existentes para chegar a solução de um sistema de EDO. O resultado final alcançado pela pesquisa mostrou-se de acordo com o esperado, uma vez que se conseguiu resolver alguns problemas selecionados usando os métodos relatados nas seções da pesquisa, bem como, a importância de modelar sistemas de EDO. Então, através da pesquisa apresentada nesta monografia, concluímos que nossos objetivos foram alcançados. Futuramente, algumas modificações poderão ser realizadas, tal como: experimentos físicos que podem ser uma alternativa para inovar nossa pesquisa.

Referências Bibliográficas

- [1] TOM M. APOSTOL, *Calculus*. Toronto: Waltham, c1969. 673p.
- [2] TOM M. APOSTOL, *Calculus and linear algebra, Vol I, 2nd ed.* 686p. A John Wiley and Sons, Inc., publication, USA 1967.
- [3] TOM M. APOSTOL, *Mathematical analysis. 2nd ed.* Reading, Mass: Addison-Wesley publishing company, Inc., c1974. 492p.
- [4] TOM M. APOSTOL, *Mathematical analysis: A modern approach to advanced calculus*. Addison-Wesley publishing company, Inc. (1958). Massachusetts, EUA.
- [5] P. B. BORWEIN AND J. M. BORWEIN, *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions*. SIAM review, Vol 26, No 3 (1984). pp. 351-366.
- [6] P. B. BORWEIN, J. M. BORWEIN AND D. H. BAILEY, *Modular equations and approximations to π : How to compute one billion digits of π* . The american mathematical monthly, Vol 96, No 3. (1989), pp201-219.
- [7] WILLIAM E. BOYCE AND RICHARD C. DIPRIMA, *Elementary differential equations*. 2nd edition. New York: John Wiley, 1969. 421p.
- [8] F. BOWMAN, *Introduction to elliptic functions*, English Univ. Press, London, 1953.
- [9] F. BROWER AND J. A. NOHEL, *The Qualitative theory of Ordinary Differential Equation*, W. A Benjamin, Inc. Menlo Park, 1968.
- [10] RICHARD BRONSON AND GABRIEL COSTA, *Equações Diferenciais. 2nd ed*, Porto Alegre: Bookman, 2008. 400p.
- [11] RUEL VANCE CHURCHILL, *Complex variables and applications. 2nd ed.* New York: McGraw-Hill, c1960. 267p.
- [12] DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Instituto de matemática pura e aplicada. [Rio de Janeiro]: IMPA; [Brasília]: CNPQ, c1977. 274p.

- [13] DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO AND ALOISIO F. NEVES, *Equações Diferenciais Aplicadas*. Instituto de matemática pura e aplicada. [Rio de Janeiro]: IMPA, c2007. 301p.
- [14] DIACU FLORIN, *Introdução a equações diferenciais: Teoria e aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 262p.
- [15] F. W. GEHRING, K. A. RIBET AND ALEX S. SHELDON, *Linear algebra done rights*. Second edition. Springer-Verlag New York, Inc., 1996.
- [16] GENE H. GOLUB AND JAMES H. ORTEGA, *Scientific computing and differential equations: An introduction to numerical methods*. Academic press, Inc. H.B.J. publishers.
- [17] MORRIS W. HIRSCH AND STEPHEN SMALE, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. New York: Academic Press, c1974. 358p.
- [18] CHIEN-LIH HWANG, *Two methods for approximating π* . Mathematics magazine, Vol 79, No 5. (2006).
- [19] DONALD L. KREIDER, *Introdução a análise linear*. Rio de Janeiro: Ao Livro Tecnico, 1972. nv. Volume 1.
- [20] DONALD L. KREIDER, *Introdução a análise linear*. Rio de Janeiro: Ao Livro Tecnico, 1972. nv. Volume 2.
- [21] STEVEN J. LEON, *Álgebra linear com aplicações*. 4 ed Rio de janeiro: LTC, c1999. 390p.
- [22] MARIVALDO P. MATOS, *Séries e equações diferenciais*. 1ed São Paulo: Prentice Hall, c2002.
- [23] D. J. NEUMAN, *Rational approximation versus fast computer methods* in Lectures on Approximations and Value Distribution, Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1982, pp. 149-174.
- [24] MURRAY H. PROTTER, *Modern mathematical analysis*. Reading: Addison-Wesley publishing company, Inc., 1964.
- [25] S. RAMANUJAN, *Modular equations and approximations to π* . Quart. J. Math, 45 (1914) 350-72.
- [26] D. SHANKS, *Improving an approximation for π* . The american mathematical monthly, Vol 99, (1992), 263.
- [27] GEORGE F. SIMMONS, *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, c1987. v.

- [28] PAVEL SOLIN, *Partial differential equation and finite element method*. A John Wiley and Sons, Inc., publication, USA 2006.
- [29] MICHAEL SPIVAK, *Calculus, 3rd ed.* Houston: Publish or Perish, c1994. 670p.
- [30] GILBERT STRANG, *Linear algebra and its applications, 3rd ed.* San Diego: Harcourt Jovanovich, c1988. 505p.
- [31] DENNIS G. ZILL, *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo (SP): Thomson, c2003. 492 p.